Mathematik am Computer: Die nächste Überforderung?

Bruno Buchberger
Research Institute for Symbolic Computation (RISC)
Johannes-Kepler-Universität, A4040 Linz
Bruno.Buchberger@RISC.Uni-Linz.ac.at

Vortrag beim 7. Österreichischen Mathematikertreffen der ÖMG, Lehrerfortbildungstag am 24. 9. 1999, TU Graz.

■ Einleitung

Es gibt so viele "Mathematiken" (Auffassungen von Mathematik) wie es MathematikerInnen gibt. In gewisser Weise ist jeder Mensch MathematikerIn (so wie jeder Mensch MusikerIn oder ZeichnerIn ist). Man sollte jedem Menschen seinen Zugang zur Mathematik finden lassen, insbesondere auch jedem Kind - und auch jedem Lehrer! Das heißt, dem eigenen mathematischen Entdecken und Zugang zur Mathematik sollte auch im Unterricht - bei den Schülern und Lehrern - breiter Raum gelassen werden. Am besten kann jene Mathematik vermittelt werden, die man selbst - als Lehrer - erfahren hat und erfährt. Der Lehrer kann und soll dem Schüler aber helfen, das Entdecken zu beschleunigen. Und dies natürlich um eine dramatischen Faktor: Wo stünden wir, müsste jede Generation für sich wieder das Bespannen einer Trommel, das Bauen von Holzblasinstrumenten, die Notenschrift, das Bauen von akustisch ausgewogenen Konzertsälen, das Mikrofon und den E-Verstärker selbst wiedererfinden (oder etwas anderes Derartiges von Null weg erfinden)? Und wo stünden wir, wenn jede Generation das Operieren mit natürlichen Zahlen, das Konzept der Funktion, das Prinzip der vollständigen Induktion, die Begriffe der Mengenlehre, die abstrakte Struktur der reelllen Zahlen, das Konzept der Differentialgleichungen und Lösungsverfahren dafür, den Begriff des Algorithmus und seine maschinelle Realisierung (Computer) aus eigener Kraft entwickeln müsste?

Ich plädiere also dafür, dass sich die Lehrer auch didaktisch am besten dadurch bilden, dass sie sich eine möglichst umfassende eigene mathematische Erfahrung aneignen. "Umfassend" kann hier "vertikal" und "horizontal" gemeint sein:

- Vertikal gibt es etliche verschiedene Schichten in der Mathematik, z.B. Experimentieren, Probleme Lösen, Theorien Bilden, Vermutungen Beweisen, Algorithmen Finden, Algorithmen Implementieren, Software Schreiben, Computersprachen Entwickeln, Computer Entwickeln, reale Probleme Modellieren, vorhandene Verfahren Anwenden, über die Mathematik mathematische Betrachtungen anstellen (Logik), die gesellschaftlichen Implikationen der Anwendung von Mathematik Überlegen, philosophische Betrachtungen über die Mathematik Anstellen, Mathematik Unterrichten, Mathematik Publizieren, mathematisches Wissen Ordnen und Wiederfinden etc. Je tiefer man in die verschiedenen Schichten eindringt, umso größer wird der spannende Bogen dazwischen, und der Höhe und Tiefe der Schichten sind keine Grenzen gesetzt.

- Auch horizontal, nach "Themen geordnet", ist die Mathematik unbegrenzt (Mengenlehre, Zahlentheorie, Geometrie, lineare Algebra, nicht-lineare Algebra, universelle Algebra, Gruppentheorie, Verbandstheorie, Ringtheorie, Theorie der endlichen Körper, Reelle Analysis, Funktionentheorie, Differentialgleichungen, Funktionalgleichungen, Funktionalanalysis, universelle Algebra, Kategorientheorie, Graphentheorie, Kombinatorik, Kryptographie, Codierungstheorie, ..., Chaostheorie, ...) und erweitert sich ständig.

Ich halte es für sehr wichtig, dass sich MathematikerInnen besonders darum bemühen, *alle* vertikalen Schichten der Mathematik auszuleben, die Erfahrung in *allen* Schichten ständig zu vertiefen und das mannigfache *Zusammenspiel zwischen allen* Schichten lebendig zu erhalten und auch zu genießen. Als eine Konsequenz davon wird man entdecken, dass sich dann Antworten auf viele didaktische Fragen der Mathematik fast von selbst ergeben, z.B. die Antwort auf die Frage, welche Rolle "der Computer" im heutigen Mathematikunterricht spielen soll. Ich halte es in der heutigen Zeit und gerade in der heutigen Zeit durchaus für möglich, die "Mathematik als Ganzes" - in bezug auf die angesprochenen vertikalen Schichten - zu erfassen und gebe mich nicht dem üblichen Pessimismus hin, dass "heute alles schon so spezialisiert ist, dass man es sowieso nicht mehr überschauen kann". Die vertikale Integration in der Mathematik ist möglich und meines Erachtens gerade heute leichter möglich als früher. Die vertikale Integration ist auch außerordentlich wichtig. Denn nichts schwächt die geistige Kraft der Mathematik (und verunmöglicht guten Mathematikunterricht und verspielt die Bedeutung der Mathematik für die Gesellschaft) mehr, als der vertikale Zerfall der Mathematik z.B. in "reine Mathematik", "formale Mathematik", "konstruktive Mathematik", "angewandte Mathematik", "Computer-Mathematik", "numerische Mathematik", "symbolische Mathematik", "experimentelle Mathematik", "Schulmathematik", "Didaktik der Mathematik" etc. mit verschiedenen Kommunitäten handelnder Personen, die sich allenfalls noch gegenseitig der "falschen" Mathematik bezichtigen.

Anders ist es bei den horizontalen "Gebieten" der Mathematik. Es ist zwar auch hier gut, dass man eigene Erfahrung in verschiedensten Gebieten erwirbt und die Querverbindungen genießt. Hier kann und soll man aber die Gelassenheit entwickeln, dass man niemals "alle" Gebiete der Mathematik überschauen und schon gar nicht "beherrschen" kann. Die Geschwindigkeit der Ausdehnung des horizontalen mathematischen Territoriums ist durch die parallele Arbeit von so Vielen immer größer, als ein Einzelner seriell nacharbeiten könnte.

Im Sinne dieser groben Analyse der zwei "orthogonalen Koordinatenachsen" (vertikal und horizontal) der mathematischen Weiterentwicklung stelle ich mir in diesem Vortrag das Ziel, drei wesentliche vertikale Schichten der Mathematik und das Zusammenspiel zwischen diesen Schichten genauer zu diskutieren:

- die Schicht des "Experimentierens" (Beobachtens und Operierens), die ich in diesem Vortrag plakativ und ein bisschen falsch "Mathematik als Physik" nenne,

- die Schicht des "Schließens" (Operierens mit Gedanken und Sprache), die ich in diesem Vortrag plakativ und ein bisschen falsch "Mathematik als Logik" nenne, und

- die Schicht des "Rechnens" (automatisiertes Schließens), die ich in diesem Vortrag plakativ und ein bisschen falsch "Mathematik als Informatik" nenne.

Daraus ergeben sich dann - wie mir scheint, fast von selbst und in natürlicher Weise - Antworten auf die Frage der adäquaten Rolle "des Computers" in der Mathematik und im Mathematikunterricht.

Diese Frage ist heute brennend: Unzweifelhaft spielt der Computer in der heutigen *Gesellschaft* eine entscheidende Rolle, vielleicht sogar *die* entscheidende Rolle. Manche meinen, dass der Computer auch in der heutigen mathematischen *Forschung* eine bedeutende Rolle spielt oder jedenfalls spielen sollte. (Ich "oute" mich, dass ich zu diesen "Manchen" gehöre. Ich weiß, dass es aber sehr viele Mathematiker gibt, die das ganz anders sehen und für die sich die Rolle des Computers auf das Lesen von e-mails, das Schreiben mathematischer Arbeiten in LaTeX und allenfalls das Suchen mathematischer Literatur im Web beschränkt.) Es ist deshalb naheliegend und wichtig, sich die Frage zu stellen, ob Computer im heutigen / zukünftigen Mathematik*unterricht* eine bedeutende Rolle spielen sollen oder nicht und, wenn ja, welches diese Rolle sein soll und wie Mathematikunterricht, der den Computer einbezieht, gestaltet werden soll.

Der Computer ist heute "modern". Vor fünfzig Jahren war die Mengenlehre "modern" (als Basis des "bourbakistischen" Aufbaus der Mathematik) und mit einiger Verzögerung wurde sie dann in den Mathematikunterricht gepresst - bei jeder passenden und unpassenden Gelegenheit. Retrosprektiv war Vieles davon überzogen, weil zum Teil falsch verstanden, und tatsächlich eine unnotwendige Überforderung von Schülern und Lehrern. Ist es ebenso "gefährlich", jetzt die Computer-Mathematik in den Unterricht zu pressen?

Ich fasse meine persönlichen Antworten auf diese Fragen, die ich in diesem Vortrag entwickle, hier schon einmal zusammen:

- *Die Computer-Mathematik ist die natürliche Fortentwicklung der Mathematik. Sie ergibt sich aus der inneren Dynamik der Entwicklung der Mathematik von der Urzeit bis heute als eine natürliche Extrapolation.*

- *Es ist naiv und gefährlich, den Computer aus der Mathematik / dem Mathematikunterricht herauszuhalten.*

- *Es ist andererseits naiv und gefährlich, den Computer mit Gewalt - bei jeder nur denkbaren Gelegenheit - in die Mathematik / den Mathematikunterricht einzubauen.*

- *Die Antwort, an welchen Stellen des Mathematikunterrichts und in welcher Weise der Computer in Betracht gezogen werden soll, kann nicht absolut gegeben werden. Sie hängt ganz wesentlich vom vorliegenden (operationalen) Lernziel, der Unterrichtsphase und vielen anderen didaktischen Parametern ab.*

- *In der Situation, wo das operationale Lernziel auf das "Verstehen" des jeweiligen mathematischen Inhalts und nicht nur auf "Anwenden" gerichtet ist, ist das "White-Box / Black-Box Prinzip" ein natürliches Prinzip, um über die Art des Einsatzes des Computers in der jeweiligen Unterrichtssituation zu befinden.*

■ Schichten in der Mathematik

■ Mathematik als "Physik": Experimentieren

Um weit in die Zukunft zu schauen, ist es immer gut, sich weit in die Vergangenheit zurückzuversetzen. Um die Gegenwart der Mathematik zu verstehen und uns mit ihrer Zukunft - insbesondere in Bezug auf den Computer - auseinanderzusetzen, versetzen wir uns deshalb in eine Situation vor, sagen wir, vielleicht 10.000 Jahren:

In gemeinsamer Arbeit gefangene Fische sollten auf eine Gruppe von Fischern so aufgeteilt werden, dass jeder Fischer gleich viele Fische erhält. *Frage*: Geht sich das aus?

Diese Frage läßt sich durch Experimentieren (Beobachten und Agieren) "direkt in der Realität" der Fische und Fischer lösen: Man gibt einen Fisch nach dem anderen reihum einem Fischer. Wenn man mit dem letzten Fisch beim letzten Fischer ankommt, "ist es sich ausgegangen", sonst nicht. (In diesem Fall könnten die Fischer zum Beispiel mit dem Fischen fortfahren wollen.)

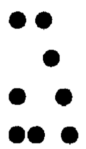
Ähnlich könnte eine Schar kleiner Kinder Äpfel in einer Schüssel untereinander möglichst gleichmäßig verteilen. Das Problem ist "im Wesentlichen" dasselbe.

Alle Fragen "dieser Art" kann man aber auch in einem "Modell" lösen. Das Beantworten von Fragen und Lösen von Problemen in "geeigneten" Modellen hat gegenüber dem direkten Arbeiten in der Realität gewaltige Vorteile: das Arbeiten in Modellen ist mit viel geringerem Aufwand und in kürzerer Zeit möglich als das Arbeiten in der Realität; das Arbeiten im Modell verändert die Realität nicht; Lösungen im Modell können gefunden werden, bevor Aktionen in der Realität gemacht werden; dasselbe Modell kann für viele Realitäten verwendet werden; etc.

Damit Modelle diese erstrebenswerten Eigenschaften haben,

> müssen sie das für die Wissensgewinnung / das Problemlösen *Unwesentliche* weglassen
> (also so einfach wie möglich sein)
>
> und das für die Wissensgewinnung / das Problemlösen *Wesentliche* "korrekt"
> ("isomorph") wiedergeben (also so kompliziert wie nötig sein).

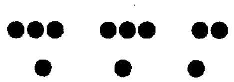
Ein Modell, welches für die obige Frage geeignet ist und welches vielleicht vor 10.000 Jahren schon bekannt war, besteht aus Steinchen: Für jeden Fisch ein Steinchen und für jeden Fischer eines:



(für jeden Fisch ein Steinchen)

(für jeden Fischer ein Steinchen).

In diesem Modell kann man die obige Frage dadurch beantworten, dass man - "isomorph" zur Realität - ein Steinchen aus dem oberen Haufen nach dem anderen reihum zu einem Steinchen unten legt. (Man beachte, dass dazu die Steinchen unten in "einer Reihe" liegen, d.h. eine gewisse sequentielle Ordnung haben müssen. Nehmen wir hier an, dass wir die Ordnung "links nach rechts" hineinsehen.) Wenn man beim letzten Zuordnen beim letzten Steinchen ankommt, "ist es sich ausgegangen", sonst nicht. In unserem Fall ist der Endzustand so:



Das letzte Steinchen von oben wurde nicht an das letzte Steinchen in der Reihe unten (das Steinchen ganz rechts) gelegt. Und damit lautet die Antwort, dass "es sich nicht ausgeht". Diese Antwort im Modell kann nun in die Realität der Fische und Fischer zurückinterpretiert werden. Die Fischer wissen, dass sich das Verteilen in der jetzigen Situation "nicht ausgehen würde" und können z.B. entscheiden, mit dem Fischen fortzufahren.

Das Operieren in diesem Modell ist so einfach, dass wir sie einer *"unintelligenten" Hilfskraft* (*Computerix*) übertragen können. Sie kann "unintelligent" sein in dem Sinne, dass sie in das Modell nichts "hineinsieht", also die Bedeutung des Modells in der Realität nicht kennt und rein im Modell operiert.

Ein "besseres" Modell (aus dem Jahre 600 oder später): Hier werden die Fische und die Fischer durch bestimmte Zeichenfolgen (heute "arabische Zahlen" genannt) modelliert. Die obige Frage in diesem Modell ausgedrückt lautet:

Lassen sich *8* Fische auf *3* Fischer gleichmäßig aufteilen?

Die Antwort läßt sich wieder durch Probieren (Beobachten und Agieren) mit den Objekten im Modell ("Rechnen") finden. Die Sache ist so einfach, dass wir sie einer *"unintelligenten" Hilfskraft* (al-Khowârizmî, heute Mathematica [1] oder Theorema [2]) übertragen können, von der wir voraussetzen, dass sie in der Lage ist, die Operation des "Wegnehmens" im Modell der Zahlen auszuführen. Hier ist die entsprechende Theorema-Sitzung (Eingaben kursiv, Ausgaben nicht-kursiv):

Compute[8 – 3]

5

Compute[5 – 3]

2

Wenn die Hilfskraft auch in der Lage ist zu verstehen, was es heißt, "das Wegnehmen so lange auszuführen, bis es nicht mehr geht", (heute würde man sagen: "wenn man der Hilfskraft das obige Programm beibringen kann"), könnten wir der Hilfskraft auch einfach befehlen, den ganzen obigen Vorgang des wiederholten Abziehens ohne Unterbrechung oder Interaktion von außen durchzuführen. In der Tat ist es möglich, den heutigen mathematischen Hilfskräften wie Mathematica, Theorema, etc., solche "Programme" beizubringen. Sagen wir einmal, wir hätten dieses Program in Theorema geschrieben und ihm den Namen 'is–divisible' gegeben. Dann könnten wir jetzt befehlen:

Compute[is–divisible[8, 3]]

False

Compute[is–divisible[9, 3]]

True

Wir betrachten nun ein etwas schwierigeres Problem: Wir haben (einen Kübel mit) 12 (Fischen) und (einen mit) 18: Welche Zahlen (Größen einer Gruppe von Fischern) sind so, dass sowohl 12 als auch 18 auf diese Zahlen aufgeteilt werden können? Die Antwort läßt sich wieder durch Probieren finden. Wir übergeben die Teilschritte wieder an eine Hilfskraft:

Compute[is–divisible[12, 1]]

True

Compute[is–divisible[18, 1]]

True

Compute[is–divisible[12, 2]]

True

Compute[is–divisible[18, 2]]

True

....

Compute[is–divisible[12, 4]]

True

Compute[is–divisible[18, 4]]

False

...

Compute[is–divisible[12, 6]]

True

Compute[is–divisible[18, 6]]

True

...

Ein nächstes Problem: Wie groß ist "der größte gemeinsame Teiler" von 12 und 18? (Was ist die maximale Größe einer Gruppe von Fischern, auf die sowohl 12 als auch 18 Fische aufgeteilt werden können?). Die Antwort läßt sich wieder durch Probieren finden. Das kann die Hilfskraft Theorema, indem sie die obige Iteration ausführt. Nennen wir dieses Theorema-Programm 'gcd–by–iteration':

Compute[gcd–by–iteration[12, 18]]

6

Durch das Experimentieren können wir auch interessante Beobachtungen machen:

Compute[gcd–by–iteration[18, 12]

6

Compute[gcd–by–iteration[30, 18]]

6

Compute[gcd–by–iteration[48, 30]]

6

Compute[gcd-by-iteration[78, 48]]

6

Wird das langweilig? Das ist sehr gut! Denn Langeweile ist das Zeichen dafür, dass man beginnt zu sehen, "wie der Hase läuft", also "eine Einsicht zu haben". In unserem Fall läuft der Hase - in den endlich vielen betrachteten Beispielen - "offensichtlich" so:

der größte gemeinsame Teiler von m und n = der größte gemeinsame Teiler von $m+n$ und n.

oder umgekehrt (für $m > n$)

der größte gemeinsame Teiler von m und n = der größte gemeinsame Teiler von $m-n$ und n.

Nun kommt die entscheidende Frage: Gilt das "immer", also für alle (natürlichen) Zahlen m und n? Diese Frage kann man durch Experimentieren mit endlich vielen Beispielen (d.h. "mit Mathematik als Physik") nicht beantworten, denn es gibt unendlich viele natürliche Zahlen!

Bevor wir uns dieser Frage zuwenden, kann man aber schon ersehen, welchen ungeheuren Nutzen es brächte, wenn man wüßte, dass die obige Behauptung für *alle* natürlichen Zahlen m und n gilt: Man könnte dann größte gemeinsame Teiler (ggt) sehr viel schneller bestimmen als durch Durchprobieren aller gemeinsamen Teiler, nämlich *durch Lesen des obigen Wissens als Anweisung:*

ggt[m, n] = ggt[m − n, n] $\Longleftarrow$ (m > n)

ggt[m, n] = ggt[m, n − m] $\Longleftarrow$ (n > m)

ggt[m, n] = m $\Longleftarrow$ (m = n)

Der Zeitgewinn ist in der Tat enorm, wie man sich entweder durch Zeitmessung am Computer oder durch Überlegen überzeugen kann: Die Rechenzeit des "Holzhammer-Verfahrens" durch Durchprobieren steigt im Wesentlichen linear mit der Größe der Eingabedaten m und n, die Rechenzeit des neuen Verfahrens aber nur logarithmisch. Also eine exponentielle Verbesserung! Was man hier an diesem einfachen Bespiel beobachten kann, ist eine fundamentale Einsicht in das Wesen der Mathematik:

Wissensgewinnen und *Problemlösen* muss man *unterscheiden*, man sollte aber Wissensgewinnen und Problemlösen in der Mathematik *niemals trennen*!

Mehr (mathematisches) Wissen erlaubt effizienteres Problemlösen.

Allgemeines Wissen (Wissen über potentiell unendlich viele Situationen) kann nicht durch Beobachten (Experimentieren in Beispielen, Operieren in der Realität bzw. im Modell) überprüft werden. Hier ist also die "Physik" zu Ende.

▪ Mathematik als "Logik": Schließen

▪ Das Mirakel des Schließens

Die Methode der Mathematik zur Gewinnung von Wissen über endlich viele Situationen ist grundsätzlich verschieden von der "physikalischen" Methode des Beobachtens. Die Methode der Mathematik ist das "Schließen". Auch Schließen ist ein endlicher Vorgang, aber auf "einer anderen Ebene":

> Schließen ist das Mirakel, mit welchem durch endliches Experimentieren mit sprachlichen Objekten Wissen über unendlich viele Situationen zwischen den besprochenen Objekten generiert werden kann.

Wie ist dies möglich?

Die Experimentierregeln des Schließens (Schlußregeln, Beweistechniken, ...) sind über die Jahrtausende kondensierte Erfahrung im Sprechen (Denken) über Realitäten und Modelle. Die Erfahrung (in endlichen Realitäten und Modellen) zeigt, daß in "beliebigen" Realitäten, die durch gewisse Regeln umgeformten Sätze immer gelten, wenn die ursprünglichen Sätze gelten. (Schlussregeln "transportieren Wahrheit" in beliebigen Realitäten. Schlussregeln sind "korrekt".)

Beispiel einer Schlussregel: Wenn in einer Realität "nicht existiert ein x, sodass $A[x]$" gilt, dann gilt in derselben Realität auch "für alle x nicht $A[x]$".

Beachte: Dies gilt *in jeder Realität und für jede Bedeutung* der in A vorkommenden Begriffe. (Besser: Wir glauben, dass das so ist. Noch bescheidener: Die so erschlossenen Wahrheiten gelten in allen Realitäten, für die die Schlußregeln korrekt sind. Die Schlussregeln gelten sicher in allen endlichen Realitäten. Ob sie in allen unendlichen Realitäten gelten, ist eine philosophische Frage genauso wie die Frage, ob es überhaupt unendliche Realitäten gibt. In der üblichen Mathematik erlauben wir uns aber, die aus der Erfahrung mit endlichen Realitäten gewonnenen Schlussregeln auch für unendliche Realitäten als gültig zu betrachten.)

Beachte: Wenn wir in einer Realität "nicht existiert ein x, sodass A[x]" beobachtet haben (durch "Kontakt der Sinne mit der Realität"), dann brauchen wir "für alle x, nicht A[x]" nicht mehr zu beobachten. Mit anderen Worten: Die zweite Aussage kann ohne zusätzliche Beobachtung ("mit geschlossenen Sinnen", "abgesetzt von jeder Realität", d.h. "abstrakt") behauptet werden.

Die Methode des Schließens macht die Mathematik zur Mathematik. Mathematik kann man nicht (wie die Physik, Chemie oder Biologie) durch die *Klasse der Objekte*, die studiert werden, charakterisieren, sondern nur durch die *Methode*, mit der man neues Wissen gewinnt. Mathematik kann auf beliebige Inhalte angewandt werden. Es gibt natürlich viele "traditionelle" mathematische Standard*inhalte*, die "häufig wiederverwertbar" sind. Aber letztlich ist Mathematik durch ihre Methode und nicht durch ihre Inhalte charakterisiert.

Auch gilt: Die Mathematik macht die Wissenschaft zur Wissenschaft. Mit der Methode der Mathematik (dem Schließen) wird in den inhaltlichen Wissenschaften wie Physik, Chemie etc. neues Wissen / neue Problemlösungen aus beobachtetem Wissen / ausprobierten Problemlösungen gewonnen. (Vgl. Kant: "Jede Wissenschaft enthält so viel Wissenschaft wie sie Mathematik enthält.") Eine Wissenschaft, die nur Fakten sammelt und nichts daraus "erschließt", ist relativ bescheiden.

Es ist erstaunlich, mit wie wenig Schlußregeln (Beweistechniken) man theoretisch (und praktisch?) auskommt, um alle (bisherigen und zukünftigen) mathematischen Resultate abzuleiten. Keine dieser Schlußregeln ist weniger "trivial" als das obige Beispiel. Wie kann aus so etwas Trivialem wie den Schlußtechniken etwas so Nicht-Triviales wie das mächtige und höchst anwendungsrelevante Gebäude der Mathematik entstehen? Die Antwort liegt darin, dass die Schlußregeln in all ihrer scheinbaren Einfachheit die Essenz der allgemeinen Erfahrung im Umgang mit unterschiedlichsten Realitäten komprimiert ausdrücken und die mit diesen gewonnen mathematischen Resultate in einem ständigen Prozess der Reinigung, Straffung, Strukturierung und Selbstanwendung zu immer mächtigeren Blöcken von Denktechniken zusammengebaut werden, die dann für die nächsten Stufen der Entwicklung der Mathematik als mächtige "Einzelschritte" zur Verfügung stehen.

Die Fähigkeit zu Schließen entsteht in der Evolution des einzelnen in einem bestimmten Stadium, manchmal früh, manchmal erst spät und in verschiedenen Ausprägungsstufen. Ein *Beispiel* eines ersten Anflugs von Schließen:

> Papa geht mit seiner Tochter (4 1/2 Jahre) durch die Stadt. Papa: "Wir schauen in alle Auslagen, die Dir und mir gefallen". Tochter: "Ja, wenn es mir gefällt, muss es auch Dir gefallen und wenn es Dir gefällt, muss es auch mir gefallen."

Ein *Beispiel*, in welchem Schließen auch in fortgeschrittenem Alter noch nicht gereift ist. ("Dialog" zwischen Spitzenpolitiker E. und P., publiziert in einem österreichisches Magazin im September 1999):

> E: "Flat-Tax gibt es ja in keinem Land." P: "Doch, gibt es." E: "Da täuschen Sie sich." P: "Ich täusche mich nicht". E: "Gibt es nicht." P: "Gibt es eben schon." E: "Eben nicht."...

▪ Beispiel: Größter Gemeinsamer Teiler

Im Kern geht es bei dem obigen Wissen, auf welchem ein drastisch schnelleres Verfahren zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers aufbaut, um folgendes Wissen über den Begriff des "Teilens" ("|"):

Proposition["Divides Sum", any[d, m, n],
$(d \mid m \wedge d \mid n) \quad \Longrightarrow \quad (d \mid m - n)$]

Zunächst weiß man von diesem Begriff nur, wie er mit dem Begriff des Multiplizierens zusammenhängt:

Definition["Divides", any[d, m],
$(d \mid m) \quad \Longleftrightarrow \quad \underset{f}{\exists}((d \, . \, f) = m)$]

Außerdem muss man natürlich schon auch verschiedene Eigenschaften des Multiplizierens kennen, z.B.:

Proposition["Distributivity", any[d, u, v, m, n],
$((d\,u = m) \wedge (d\,v = n)) \quad \Longrightarrow \quad (d\,(u - v) = m - n)$]

Wie kann man nun aus der Definition["Divides"] und der Proposition["Distributivity"] die Proposition["Divides Sum"] erschließen? Bitte als Übung durchführen! Das braucht eine gewisse "Intelligenz", die nach der heute üblichen Einschätzung über das Durchführen einer Vorschrift durch eine Hilfskraft hinausgeht!

Wir wollen hier aber die Zeit nicht mit dem Finden und Aufschreiben des Beweises vergeuden und benutzen deshalb jetzt eine futuristische Hilfskraft aus dem Jahre 2001. Sie heißt Theorema, ist noch nicht allgemein verfügbar am Markt, aber schon am Horizont sichtbar, siehe [1]. (Theorema arbeitet nicht in einem Modell der realen Welt wie die Hilfskraft, die im Modell der Zahlen Fische verteilt, sondern in einem Modell der Welt des Schließens, also "einen Stock höhere"! Es wird also sehr viel Mathematik auf sich selbst angewendet, um ein solches System zu entwickeln.) Dieser Hilfskraft brauchen wir nur mehr die obige Definition und die obigen Sätze einzugeben und dann zu befehlen:

```
Use[⟨Definition["Divides"], Proposition["Distributivity"]⟩]
```

Dieser Befehl sagt Theorema nicht nur, dass im folgende Beweis das angegebene Wissen verwendet werden kann, sondern dass es auch das einzige Wissen ist, dass in diesem Stadium verwendet darf. Der nächste Befehl sagt Theorema, dass es den Beweis des gewünschten Satzes generieren soll:

```
Prove[Proposition["Divides Sum"]]
```

Als Ergebnis erhalten wir völlig automatisch den folgenden Beweis (einschließlich des englischen Texts):

Prove:

(G) $\underset{d,m,n}{\forall} (d \mid m \wedge d \mid n \Rightarrow d \mid m - n)$,

under the assumptions:

(A1) $\underset{d,m,n,u,v}{\forall} ((d * u = m) \wedge (d * v = n) \Rightarrow (d * (u - v) = m - n))$,

(A2) $\underset{d,m}{\forall} \left(d \mid m \Leftrightarrow \underset{f}{\exists} (d * f = m)\right)$.

We assume, for arbitrary but fixed d_0, m_0, n_0,

(1) $d_0 \mid m_0 \wedge d_0 \mid n_0$

and show

(2) $d_0 \mid m_0 - n_0$.

For proving (2), by (A2), it suffices to prove

(3) $\underset{f}{\exists} (d_0 * f = m_0 - n_0)$.

Formula (1), by (A2), implies

(4) $\underset{f}{\exists} (d_0 * f = m_0)$.

By (4), we can take an appropriate f_0 such that

(5) $d_0 * f_0 = m_0$.

Formula (1), by (A2), implies

(6) $\exists_{f} (d_0 \cdot f = n_0)$.

By (6), we can take an appropriate f_1 such that

(7) $d_0 \cdot f_1 = n_0$.

From (5) and (7), by (A1), we obtain

(8) $d_0 \cdot (f_0 - f_1) = m_0 - n_0$.

Formula (3) is proved because (8) is an instance of it.

■ Experimentieren und Beweisen

Woher kommen Vermutungen wie Proposition["Divides Sum"]? Diese können aus der Analyse der Begriffe, aus Beispielen, graphischen Veranschaulichungen, etc. kommen. Für das Erfinden von Vermutungen gibt es keine Regeln (wohl aber "Heuristiken"). Das Erfinden von mathematischem Wissen kann beliebig schwierig sein. Das ist der eine kreative Teil der Mathematik.

Wie findet man die Ideen für den Beweis von Vermutungen? Diese können ebenfalls aus der Analyse der Begriffe, aus Beispielen, graphischen Veranschaulichungen, etc. kommen. Auch dafür gibt es keine Regeln (wohl aber "Heuristiken"). Das Finden von Beweisen (Schlussketten) kann beliebig schwierig sein, obwohl es dann im Prinzip trivial ist, jeden Schritt nachzuprüfen. Das Finden von Beweisideen ist der andere kreative Teil der Mathematik. Allerdings gibt es für immer größere Klassen von Formeln mathematische Algorithmen, die es gestatten, Beweise für beliebige Formeln aus diesen Klassen automatisch zu finden. Manche dieser Klassen sind so reichhaltig, dass man es noch vor wenigen Jahren für "unmöglich" gehalten hat, allgemeine automatische Beweisverfahren dafür zu finden.

Zwischen dem Experimentieren an Beispielen, dem Vermuten neuer Sachverhalten und dem Finden von Beweisen besteht ein enger Zusammenhang, der die treibende kreative Kraft in der Mathematik ist. Daraus ergibt sich:

> *Mathematisches Experimentieren* und *Beweisen* muss man streng *unterscheiden*, man sollte aber Experimentieren und Beweisen in der Mathematik *niemals trennen*!

■ Die Trivialisierung der Mathematik durch die Mathematik

Wenn man Proposition["Divides Sum"] bewiesen hat, ist der folgende Satz ein leichtes Korollar:

```
Proposition["Euclid", any[m, n],
    gcd[m, m] = m                              "gcd="
    gcd[m, n] = (gcd[m - n, n]  ⇐  (m > n))    "gcd>"  ]
    gcd[m, n] = (gcd[m, n - m]  ⇐  (n > m))    "gcd<"
```

Nachdem der Beweis (ein endliches Objekt; allerdings ein Objekt auf der "Meta-Ebene") - in einem vielleicht nicht trivialen Prozess - gefunden wurde, ist das Anwenden des Satzes (das "Rechnen") für unendlich viele Instanzen des Problems trivial. Zum Beispiel könnte man jetzt in Theorema einfach eintippen:

Use[⟨*Proposition*["*Euclid*"]⟩]

Compute[*gcd*[*12, 18*]]

6

Jeder Rechenschritt in Theorema ist in der Tat ein spezieller Schlussschritt ("Rewriting" = Einsetzen und Ersetzen). Ein Design-Prinzip von Theorema ist es, dass eine Formel, die im Stadium des Beweisens als Aussage über (unendlich viele) Objekte betrachtet wird, unverändert im Stadium des "Rechnens" als Algorithmus verwendet werden kann. Das entspricht der Grundintention der Mathematik und auch der Tradition der Mathematik, Wissensgewinnung und Problemlösen, bzw. Beweisen und Rechnen im selben logischen und sprachlichen Rahmen abzuwickeln. (Erst in allerjüngster Zeit, sagen wir in den letzten 50 Jahren, hat sich die "statische", "strukturorientierte", "wissenorientierte" Richtung in der Mathematik von der "dynamischen", "problemorientierten", "methodenorientierten" Richtung in der Mathematik getrennt, was m.E. zu einer bedauerlichen Verarmung beider Richtungen, insbesondere der bedauerlichen Abspaltung der Computer Science von der Mathematik und umgekehrt der "reinen" Mathematik von der algorithmischen Mathematik geführt hat.)

Um einen bestimmten Teil der Mathematik (zum Beispiel das Bestimmen von größten gemeinsamen Teilern) zu trivialisieren, braucht man auf einer höheren Schichte stärkere Mathematik (zum Beispiel die Euklidische Einsicht und deren Beweise) als jede einzelne Instanz des trivialisierten Teils der Mathematik. Dieses Prinzip ist rekursiv: Um das Beweisen von Sätzen wie des Euklidischen zu trivialisieren, braucht man eine Einsicht auf einer höheren Ebene der Mathematik (und deren Beweis) als den Euklidischen Satz. Im Prinzip befindet sich die Mathematik in einem ständigen (nie abgeschlossenen und nie abschließbaren) Prozess der Selbsttrivialisierung. Überspitzt könnte man sagen, dass es das Ziel der Mathematik ist, sich selbst zu trivialisieren.

Ein nicht-triviales Beispiel dazu: Hunderte interessanter geometrischer Sätze (wie der Satz von Pappus, der Satz von Desargues, etc.) sind, wenn man Koordinaten einführt und die Sätze dann entsprechend formalisiert, Boolesche Kombinationen von Gleichheiten zwischen multivariaten Polynomen in den Koordinatenvariablen. Man kann ein für alle mal zeigen, dass die Entscheidung über die Gültigkeit solcher Formeln auf die Frage nach der Existenz von Lösungen multivariater nicht-linearer polynomialer Gleichungssysteme zurückgeführt werden kann und dass solche Gleichungssysteme genau dann eine Lösung haben, wenn die zugehörigen "Gröbner-Basen" nicht auf $\{1\}$ reduzieren. Der Beweis dieses Satzes, der die wesentliche Aussage aus der Theorie der Gröbner-Basen darstellt, ist schwierig. Wenn man ihn aber einmal bewiesen hat - mit Mitteln, die weit über das Arbeiten mit Booleschen Kombinationen von Gleichheiten zwischen multivariaten Polynomen hinausgehen - ist die Entscheidung über die Gültigkeit der unendlich vielen Booleschen Kombinationen von Gleichheiten zwischen multivariaten Polynomen (und damit über unendlich viele interessante geometrische Vermutungen) "trivialisiert" in exakt dem Sinne, dass man sie mit einem einzigen Algorithmus völlig automatisch (also am Computer) entscheiden kann. (Für eine Einführung in den heutigen Stand der Theorie der Gröbner-Basen, die vom Autor in den 70er Jahren grundgelegt wurde, siehe [3].)

▪ Mathematik als "Informatik": Automatisiertes Schließen

Es ist also die innere Natur der Mathematik, zu trivialisieren, d.h. durch mehr Einsicht "Kompliziertes auf Einfaches zurückzuführen". Automatisieren ist die konsequente Fortführung des Grundanliegens des Trivialisierens in der heutigen Zeit, in welcher "Verfahren" nicht nur einer Hilfskraft, sondern einer Maschine übergeben werden können.

(In diesem Zusammenhang ist es auch wichtig zu sehen, woher die heutigen Maschinen zur Exekution von algorithmischen Verfahren kommen? Sie kommen ebenfalls aus einer Selbstanwendung der Wissenschaft - inklusive Mathematik - auf die Mathematik! Natürlich waren ganz wesentlich grundlegende mathematische Einsichten über das Wesen des "Rechnens" notwendig, um das Rechnen in seiner universellsten Art auf physikalisch realisierbare Bausteine herunterzubrechen. Und natürlich waren und sind immer neue mathematische Einsichten notwendig, um immer feinere algorithmische Sprachen, immer feinere Programmentwurfsmethoden, immer bessere Datenbankkonzepte, immer verläßlichere Datensicherheitssysteme usw. zu entwerfen.)

Wenn also die Mathematik die Automatisierung (die Algorithmisierung, "den Computer") aus der Betrachtung ausschließt, versteht sie sich selbst nicht und beschneidet ihre Entwicklung fundamental. Nur durch immer feinere mathematische Einsichten gelingt es, Probleme zu algorithmisieren. Es ist nicht so, dass die auf Algorithmen ausgerichtete Mathematik mit "weniger Mathematik" auskommt, weil ja "das stupide Wiederholen von Operationen am Computer" feinere Resultate aus der Mathematik unnotwendig macht. Es ist exakt umgekehrt: Je mehr man bestimmte Problemklassen algorithmisch behandeln möchte, umso feinere und stärkere mathematische Resultate mit umso schwierigeren Beweisen muss man erfinden. Dies deshalb, weil man - bei gegebenem Problem - mehr mathematische Intelligenz hineinstecken muss, wenn man die Lösung des Problem auf "maschinenrealisierbare" Operationen reduzieren muss, als wenn man voraussetzen darf, dass man für dasselbe Problem "mächtige abstrakte Operatoren" als Bausteine zur Verfügung hat, die aber nicht realisierbar sind. Die Intelligenz steckt in der Reduktion, nicht in den Bausteinen! (Dijkstra formulierte das pointiert einmal so: "Those who are poor mathematicians better stay pure mathematicians.")

Es ist auch "politisch" äußerst unklug, wenn die Mathematik am Computer vorbeigeht. Der Computer ist der Ausfluss aus der Mathematik, der heute gesellschaftlich die größten Auswirkungen hat. Er hat die Gesellschaft grundlegend verändert und die Veränderung ist noch lange nicht abgeschlossen. Durch Entlassung der "Informatik" aus der Mathematik hat sich die Mathematik von ihrem erfolgreichsten Kind verabschiedet. Es ist traurig anzusehen, dass viele Mathematiker stolz darauf sind, dass sie den Computer nur für das Schreiben von e-mails, für das Tippen von Publikationen mit LaTeX und vielleicht noch für eine Literatur-Recherche über das Web benutzen, und nicht sehen, dass der Computer die Materialisierung der innersten Triebkraft der Mathematik, neues Wissen in Verfahren umzuwandeln und aus Problemen Impulse für neues strukturelles Wissen zu stimulieren, darstellt.

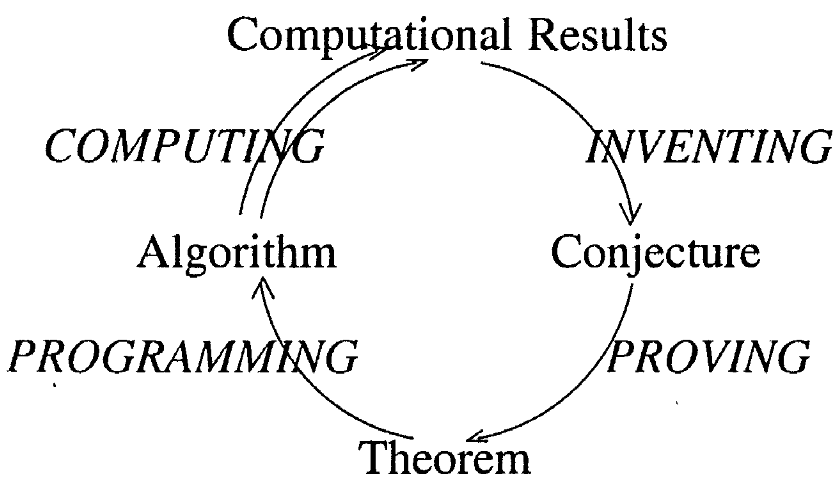
Daraus ergibt sich: Nicht-algorithmische Mathematik und *algorithmische Mathematik* muss man *unterscheiden*, man sollte aber nicht-algorithmische und algorithmische Mathematik *niemals trennen*!

▪ Zusammenfassung: Die Kreativitätsspirale

Wir fassen die hier entwickelte Sicht der Mathematik zusammen:

> Modellieren,
> Experimentieren,
> Einsehen,
> Vermuten,
> Beweisen,
> Verfahren Extrahieren,
> Verfahren Anwenden
> sind *verschiedene* Schichten / Phasen der Mathematik,
>
> man sollte sie aber *immer zusammen sehen.*

In einem Bild fasse ich diese Sicht gerne in der folgenden "Kreativitätsspirale der Mathematik" zusammen:



Man kann beim Durchlaufen dieser Spirale an irgendeinem Punkt beginnen, z.B. in der Phase, in welcher man irgendein (schlechtes) Verfahren zur Lösung eines Problems bzw. irgendein (wenig) Wissen über einen Begriff hat (z.B. nur die Definition des größten gemeinsamen Teilers). Wenn man mit diesem Verfahren / diesem Wissen an Beispielen "experimentiert", kommt man vielleicht zur Vermutung von neuem, "interessanten" Wissen über das Verfahren / den Begriff. ("Interessant" in dem Sinne, dass sich die Lösung des Problems / das Verstehen des Begriffs "vereinfacht". Beispiel: Die Vermutung von Euklid über größte gemeinsame Teiler.) Eine Vermutung (die in endlich vielen Instanzen wahr ist) ist in der Mathematik nicht gut genug. Es braucht einen Beweis. Das ist natürlich der Kern der mathematischen Aktivität. (In Systemen wie Theorema wird auch das Beweisen zu großen Teilen durch Algorithmen unterstützt (werden). Das zeigt die Richtung, in welcher die Mathematik heute geht.) Durch einen Beweis wird eine Vermutung ein Satz. Aus einem guten Satz kann man ein verbessertes Verfahren für das betrachtete Problem herausziehen und in eine für den Computer exekutierbare Form bringen ("Programmieren"). (In einem System wie Theorema ist dieser Schritt nicht mehr nötig, denn in Theorema sind Sätze, die die Kernidee von Algorithmen enthalten, bereits Algorithmen, d.h. man kann sie in Theorema nicht nur beweisen, sondern dann innerhalb von Theorema "direkt exekutieren". Das heißt: In Theorema sind Algorithmen nichts anderes als spezielle Sätze oder, mit anderen Worten, Theorema ist eine Logiksprache, die eine algorithmische Sprache als Teil enthält.)

Damit ist man wieder am Anfang der Reise in der Spirale, aber eben - nicht wie in einem Kreis wieder beim Punkt Null, sondern - auf einer höheren Stufe, weil man durch die Reise durch die Spirale neues Wissen und bessere Verfahren (z.B. den Euklidischen Algorithmus) gewonnen hat. In der Graphik ist diese höhere Stufe durch einen zweiten gekrümmten Pfeil parallel zum ersten angedeutet. Man kann jetzt mehr und schwierigere Beispiele in kürzerer Zeit bearbeiten. Damit kommt man vielleicht zu noch tieferen und interessanteren Vermutungen über die betrachteten Probleme, Begriffe und Verfahren (z.B. zur Vermutung von Lehmer über die Invarianz der Zwischenergebnisse bei leichter Modifikation der Eingabezahlen beim Euklidischen Algorithmus und damit zum Lehmer'schen Algorithmus, der sehr viel schneller ist als der Euklidische). Man muss jetzt versuchen, diese zu beweisen (oder zu widerlegen), usw. Es gibt keine Grenze für die Höhe der Spirale, die man in einem bestimmten Begriffsumfeld erreichen kann. Mathematik ist inhärent "unvollständig", d.h. "immer verbesserbar", d.h. sie läßt Raum für beliebige "Kreativität". (In der Algorithmentheorie läßt sich dieser "Kreativitätsbegriff", der wesentlich vom Gödelschen Unvollständigkeitssatz motiviert wurde, sogar formalisieren und führt zum Begriff der "kreativen Menge", siehe Lehrbücher zur Algorithmentheorie, z.B. [4].)

■ Konsequenzen für die Didaktik

■ Alles ist trivialisiert: Was nun?

Das Addieren von natürlichen Zahlen in Dezimaldarstellung ist schon lange trivialisiert, d.h. "der Computer kann addieren". Oh, Verzeihung, eine solche Aussage ist natürlich ein totaler Unsinn! Wenn Sie die Ausführungen oben mitvollzogen haben, sollten Sie so etwas nie mehr sagen. Der Computer "kann" natürlich gar nichts. Richtig ist vielmehr: Es gab Mathematiker, die schon vor langer Zeit - anstatt jedes Additionsproblem eigens auf die eine oder andere Art zu lösen - durch "mehr Nachdenken" (also eine Runde in der Kreativitätsspirale) - ein einheitliches Wissen (nämlich im Wesentlichen das Distributivitätsgesetz für + und *) und ein daraufaubauendes Verfahren gefunden haben, mit dem man alle Additionsprobleme auf ein und dieselbe Art "ohne weiteres Nachdenken", "durch Befolgen von einfachen Anweisungen", eben "mechanisch", "maschinell" durch eine unkreative Hilfskraft (heute den Computer) lösen kann.

Genauso ist heute trivialisiert: das Lösen linearer Gleichungssysteme, das Differenzen elementarer Funktionen, ..., das Lösen beliebiger nicht-linearer polynomialer Gleichungssysteme, die Primärdekomposition beliebiger algebraischer Mannigfaltigkeiten, ..., die Erzeugung von Kryptocodes mit vorgegebenen Eigenschaften, das Entscheiden der Gültigkeit von beliebigen Sätzen aus der Theorie der reell abgeschlossenen Körper, ..., usw. usw.

Die Liste der trivialisierten Teile der Mathematik wird schnell länger. In den letzten 40 Jahren wurden mehr Teile trivialisiert als in den Jahrhunderten davor. 100 % der AHS/BHS-Mathematik und 90 % der ersten vier Semester Grundausbildung Mathematik (einschließlich des Beweisens in den meisten dieser Bereiche) ist (bald) in diesem Sinne "trivialisiert".

Was sollen wir dann eigentlich in der Mathematik noch unterrichten? Sollen wir die trivialisierten Teile der Mathematik in der Ausbildung einfach "überspringen" und nur mehr lehren, welche Software man kauft und welche Funktionen man wie aufruft? Wird es uns damit - wie manche meinen - gelingen, den Geist frei zu machen für das "wirklich kreative Arbeiten" in der Mathematik, das "Anwenden der Mathematik auf reale Probleme", ...?

Oder sollen wir die "Verwendung des Computers" im Mathematikunterricht verbieten, damit die Schüler und Studenten "nicht verdorben" werden? Sollen wir den Computer den "Informatikern" (oder den BWL-Lehrern) überlassen? Und sollen wir vielleicht nur die "Grundlagen" lehren, das "Wesentliche", die "reine" Mathematik?

▪ Die triviale Antwort

Die triviale, aber äußerst praktische und operationalisierbare Antwort auf diese Fragen ist: Es gibt keine *absolute* Antwort auf diese Fragen. Die Antwort kann nur *relativ* zu den wesentlichen Unterrichtsparametern gegeben werden:

(operationales) Lernziel,
Lernphase,
Altersstufe,
Vorbildung,
etc.

Beispiel: Lehrinhalt: Gleichungssysteme. Adressaten: BWL-Studenten. Operationales Lernziel: Reale Probleme als Gleichungen erkennen, formulieren und lösen können.

In diesem Beispiel kann die Lernabfolge in etwa wie folgt sein:

Problem aus der Realität (z.B. geometrischer Realität) präsentieren.
Modellieren und erkennen als Gleichungssystem.
Erkennen der Art des Gleichungssystems.
Wissen über verfügbare Algorithmen in Software-Systemen präsentieren.
Wählen eines anwendbaren Verfahrens.
Anwenden (Aufrufen) des Verfahrens mit Daten.
Lösungen in der Realität interpretieren (z.B. in der geometrischen Darstellung).
Lösungen diskutieren, kritisieren, überprüfen.
Schönen Bericht schreiben (in gutem Deutsch oder Englisch oder Japanisch).

Allenfalls macht es in diesem Kontext Sinn, grob und anschaulich zu erklären, wie und warum das angewandte Verfahren arbeitet und wo allenfalls die kritischen Punkte sind. Aber nicht mehr! Es wäre sinnlos, die BWL-Studenten mit Beweisen zu quälen. Die Abfolge sollte wiederholt werden, bis es langweilig wird. Das Erreichen des Zustands der Langeweile - ausgehend von einem Anfangszustand, in welchem die betrachteten Probleme fast übermenschlich schwierig erscheinen - ist das wichtigste Erfolgs- und Abbruchskriterium für (mathematischen) Unterricht, denn das Erreichen der Langeweile beweist, dass "völliges Verstehen" bis zum Stadium erreicht wurde, in dem man weiß, "wie der Hase läuft". Mit anderen Worten, wer von einer übermenschlich erscheinenden Schwierigkeit zum Punkt gelangt ist, wo das zuerst Schwierige langweilig einfach erscheint, der ist eine Runde in der Kreativitätsspirale vollständig durchgegangen. Er/sie hat erlebt, dass gute Mathematik einen schwierig erscheinenden Bereich der Mathematik trivialisiert. Umgekehrt ist es tödlich, den Unterricht über den Punkt der Langeweile weg fortzusetzen.

Beispiel: Lehrinhalt: Bruchzahlen. Adressaten: Unterstufe. Operationales Lernziel: Alle arithmischen Operationen mit Bruchzahlen ausführen können.

In diesem Beispiel kann die Lernabfolge in etwa wie folgt sein:

Experimentieren in mehreren anschaulichen Modellen
("Tortenstücken" etc.) der ganzen und der Bruchzahlen.
Verständnis für die Grundprobleme der Arithmetik in den Modellen klar bekommen.
Beobachten, dass gewisse Regelmässigkeiten "immer" auftreten.
Die Regelmässigkeiten zu Vorschriften zusammenfassen,
die das Lösen der Grundprobleme vereinfachen,
systematisieren und schließlich "trivialisieren" ("Rechenfertigkeit").

Auch hier wieder gilt das Abbruchskriterium der "Langeweile".

Wie viel man falsch machen kann, wenn man "absolute" Antworten auf die Fragen des vorigen Abschnitts geben will und man sich nicht klar ist, dass die Wahrheit von den änderbaren Unterrichtsparameter abhängt, kann man gerade an diesem Beispiel studieren: Es hat ja eine Zeit gegeben, wo man z.B. glaubte, man müßte das Operieren mit Zahlen schon in der Unterstufe unbedingt an den (statischen) Begriff der Menge knüpfen - eine unadäquate, unrealistische und völlig überflüssige "Überforderung" in diesem Stadium des Mathematikunterrichts! Oder man könnte meinen, man sollte / müßte schon in einem Alter mit Beweisen kommen, um das Operieren mit mathematischen Objekten zu "erklären", wo das Denken mit dieser Technik noch überhaupt nichts anfangen kann, sondern sich eben erst - umgekehrt - die Techniken des Schließen langsam durch eine möglichst reichhaltige Erfahrung des Operierens mit konkreten Objekten im Gehirn spontan entwickeln können sollen. Andere wieder meinen, man sollte "Rechnen" durch Drillen lernen, ohne dass am Anfang dem Verstehen der Vorgänge an konkreten Objekten Zeit und Raum gegeben wird. Wieder andere meinen, man sollte nur das Verstehen lehren und niemals "Drillen", d.h. niemals das Erlebnis lehren, dass man - durch gründliches Verstehen - zu einem Punkt kommen kann, wo eine ganze Klasse von Aufgaben "schematisch" durch ein und dasselbe, immer anwendbare Verfahren gelöst werden kann. Damit entzieht man den Schülern. gerade die wichtigste Erfahrung der Mathematik, nämlich dass gute Mathematik einen unendlichen Teil der Mathematik trivialisiert, oder mit anderen Worten, dass "einmal gründlich Nachdenken in Zukunft das Nachdenken in unendlich vielen Fällen überflüssig macht". Wieder andere meinen, dass man heute das Kopf- und Handrechnen auch den Volks- und Unterstufenschülern nicht mehr beibringen müsste und man ihnen statt dessen nur mehr das "Knöpchendrücken" am Rechner zeigen müsste. Welcher Bildungsentzug in einem nie mehr wiederholbaren Entwicklungsstadium des kindlichen Denkens! Wieder andere meinen, man dürfe den Kindern das "Knöpfchendrücken" nie beibringen. Welche Vergeudung von Zeit und kindlicher Energie in dem Stadium, wo die Langeweile mit dem gründlich verstandenen Kopf- und Handrechnen schon eingetreten ist.

Beispiel: Lehrinhalt: Nichtlineare Gleichungssysteme mit Newton-Verfahren lösen. Adressaten: Letzte Klasse eines Gymnasiums oder ein frühes Semester der Uni-Mathematik. Operationales Lernziel: Wie und Warum des Verfahrens verstehen, das Verfahren (programmieren und) anwenden können.

In diesem Beispiel kann die Lernabfolge in etwa wie folgt sein:

Probleme als nichtlineares Gleichungssystem formulieren und erkennen.
(Allenfalls Aufruf des Newton-Verfahrens aus einem SW-System in den Beispielen.

um Verständnis für die Probleme und deren Lösung zu bekommen.)

Graphische Veranschaulichung in zwei Variablen:
 Ausgangslösung und Ersatz der gekrümmten Flächen durch Tangentialflächen.
 Beobachtung des Schnitts der Tangentialflächen.
Beschreibung des Tangentialflächen-Schnitts als lineares Gleichungssystem
 (Allenfalls unter Verwendung eines Computer-Programms zum Zeichnen der Schnitte.)
Gedanke der Iteration bis zu einem Abbruchkriterium.
Diskussion der Bedingungen, unter welchen das Verfahren konvergiert.
(In der Uni-Mathematik: Beweis der Sätze über Konvergenzbedingungen im allgemeinen Fall.)

Durchführung in Beispielen per Hand (*"White Box"*),
 wobei der lineare Gleichungssystemteil jeweils
 mit einem fertigen Programm (*"Black Box"*) gemacht wird, bis es langweilig wird.

(Verfahren programmieren unter Aufruf von fertigen Programmen
 für das Lösen linearer Gleichungssysteme.)

Verfahren als *"Black Box"* für kompliziertere Beispiel (aus der Realität) anwenden.

Später, zum Beispiel in einer Lernsequenz über Runge-Kutta-Quadratur-Formeln, oder über Inversion von unendlichen Reihen, oder über Kryptocodes, oder ..., können / sollen Verfahren für nichtlineare Glgssysteme nun ebenfalls als *"Black Boxes"* verwendet werden.

Die alternierenden White-Box- und Black-Box-Phasen in übereinanderliegenden Türmen (das "White-Box / Black-Box Prinzip") reflektieren in der Lehre die Phasen in der Erfindung / Forschung, insbesondere auch einen Durchgang in der "Kreativitätsspirale" der Mathematik. Die White-Box- und Black-Box-Phasen beschreiben, bei gegebenem Lehrziel, die zwei wesentlich verschiedenen Zustände des Lernenden: In der White-Box-Phase ist der Lehrstoff (zum Beispiel ein Begriff, eine Eigenschaft, ein Verfahren) noch neu, in der Black-Box-Phase ist er bekannt. Die Frage, ob man einen im Prinzip bereits trivialisierten Teil der Mathematik überhaupt noch unterrichten soll, läßt sich *nicht absolut* beantworten, sondern eben nur *relativ* zur Phase im Unterricht: In der White-Box-Phase wäre es fatal, nur mehr "das Drücken eines Knopfes" (oder das Aufrufen einer Funktion in einem mathematischen Software-System) zu unterrichten. In der White-Box-Phase muss der gesamte Prozess der Erarbeitung der neuen Inhalte durchgezogen werden (oder wenigstens der Teil, der für die jeweiligen Adressaten und das operationale Lernziel relevant ist). In der Black-Box-Phase wäre es umgekehrt fatal, den jetzt trivialisierten Teil der Mathematik weiterhin noch als "White-Box" zu behandeln. Vielmehr sollte man sich jetzt daran erfreuen, dass dieser Teil als trivialisiert einer Hilfskraft, nämlich heute dem Computer übergeben werden kann, und man sollte auch unterrichten, wie man dieses Übergeben macht (Programmieren) und / oder wie man einfachen Zugriff zu dieser Black-Box (als eingebaute Funktion in einem mathematischen Software-System) hat. Das "White-Box / Black-Box Prinzip" ist selbst rekursiv, d.h. etwas, was in einer bestimmten Unterrichtssequenz White-Box ist und frühere Unterrichtsergebnisse als Black-Box verwendet, wird in einer späteren Unterrichtsphase selbst Black-Box!

Das White-Box / Black-Box-Prinzip ist einfach und natürlich, fast selbstverständlich. Ich habe es vor etlichen Jahren formuliert, siehe [5], weil ich in zahlreichen Diskussionen immer wieder beobachtet habe, wie viele Mathematiker auch heute noch an eine "absolute" Antwort auf die Fragen des vorigen Abschnitts glauben und sich dementsprechend zu einem der beiden (sich bekämpfenden) "Lager" bekennen: zum Lager derjenigen, die "den Computer aus dem Mathematikunterricht verbannen" wollen; oder zum Lager derjenigen, die nur mehr den "kreativen Teil der Mathematik" unterrichten wollen, nämlich denjenigen, für den es noch keine Algorithmen (also keine Funktionen in Systemen wie Mathematica, Maple, Derive, etc.) gibt, und die für die algorithmisierten Teile nur mehr zeigen wollen, wie man die Algorithmen aufruft. All das beruht auf einer sehr einseitigen Sicht der Mathematik, einer zu statischen Sicht der Entwicklung des mathematischen Denkens im Kind, einer kleinmütigen Einschätzung des kreativen Prozesses der Weiterentwicklung der Mathematik und der grenzenlosen, aber niemals abschließbaren Algorithmisierbarkeit der Mathematik. Ich denke, dass das White-Box / Black-Box-Prinzip demgegenüber in vielen Unterrichtssituationen eine einfache, praktische und theoretisch wohlbegründete Entscheidungshilfe geben kann, mehr Details darüber und weitere Beispiele in [5].

■ Zusammenfassung

Ich habe die "vertikalen" Schichten der Mathematik, insbesondere die Schichten des Experimentierens, des Beweisens und des Rechnens herausgearbeitet und ihren inneren Zusammenhang erklärt. Aus einem immer tiefer werdenden Verständnis der Mathematik, in welchem die vertikalen Schichten der Mathematik zusammen gelebt werden und die Spannung zwischen den Schichten immer mehr erweitert wird, ergeben sich die Antworten auf viele Fragen der mathematischen Didaktik, insbesondere auf die Frage nach der Rolle der algorithmichen Mathematik (nach der Rolle "des Computers") im Mathematikunterricht, meines Erachtens (fast) von selbst.

■ Literatur

[1] S. Wolfram. *The Mathematica Book*. Cambridge University Press, 4. Auflage, 1999.

[2] B. Buchberger. *Theorema: A Short Demo*. RISC-Report, 2000. Zugreifbar als Archiv sowohl als Mathematica-Notebook als auch als .ps File über die Web-Adresse http://www.risc.uni-linz.ac.at/people/buchberg/papers/B-Buchberger-1999-Paper-Theorema-Demo.zip

[3] B. Buchberger, F. Winkler (Hsg.). *Gröbner Bases: Theory and Applications*. London Mathematical Society Lecture Note Series **251**, Cambridge University Press, 1998.

[4] E. Börger. *Berechenbarkeit, Komplexität, Logik*. Vieweg, Braunschweig - Wiesbaden, 3. Auflage, 1992.

[5] B. Buchberger. Should Students Learn Integration Rules? *ACM SIGSAM Bulletin* **24/1**, pp. 10-17, 1990.